

# SHU(MRU) 物理学院-每日一题

## (试行版 1)

Pro. Shu

2023 年 7 月 3 日

### 题目 1.

天体或微观系统的运动可借助计算机动态模拟软件直观显示, 这涉及几何尺寸的按比例缩放. 为使显示的运动对缩放后的系统而言是实际可发生的, 运动时间也应缩放.

1. 在牛顿力学框架中, 设质点在力场  $F(r)$  中作轨道运动, 且有  $F(\alpha r) = \alpha^k F(r)$ , 其中  $k$  为常数,  $r$  为位矢. 若几何尺寸按比率  $\alpha$  缩放显示, 确定运行时间的缩放率  $\beta$ . 并由此证明, 行星绕太阳轨道运动周期的平方与轨道几何尺寸的立方成正比.
2. 可以将上面一套处理模式推广. 在质点系势能函数是坐标的  $k$  次齐次函数的情况下, 做变换  $r \rightarrow \alpha r, t \rightarrow \beta t$ . 为了使放缩后运动方程不变,  $\alpha$  和  $\beta$  之间应存在什么样的关系? 在以上情况下, 求出变换前后时间、速度、能量、动量、角动量之比 (用轨迹线度比表示).
3. 在开普勒问题 (Kepler problem) 中, 再次求出第 2 题中变换前后各力学量之比. 试说明: 在开普勒问题中, 运动有界当且仅当总能量为负值.

**题目 1 的提示.** 本题出题思路来源于某竞赛题和力学相似性. 第 3 问中的说明题可以参考经典力学中的位力定理.