

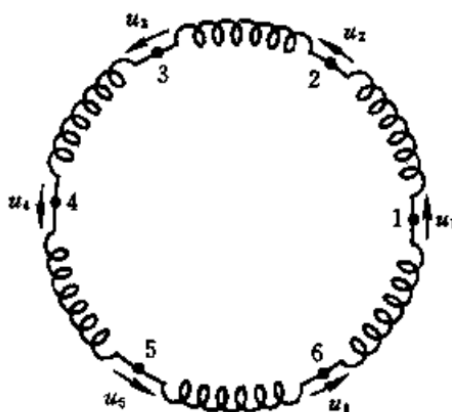
SHU(MRU) 物理学院-每日一题 5

Prof. Shu

2023 年 7 月 8 日

题目 5.

如图, 6 个质量均为 m 的小球串在光滑圆环上, 彼此间用劲度系数均为 k 的 6 个弹簧相连, 整个系统在水平面内. 当各小球处在平衡位置时, 弹簧均为原长. 求该系统的特征频率.



题目 5 的提示. 一个典型的多自由度振动的题目.

题目 4 的参考答案.

将空气分成许多平行于地面的薄层, 任一薄层的折射率为 n , 折射角为 θ , 其厚度为 dy .

由折射定律与几何关系, 有

$$n \sin \theta = C = n_1 \sin \theta_1 \quad \text{及} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}},$$

故

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n^2}{n_1^2 \sin^2 \theta_1} - 1} < 0, \quad (1)$$

其中 $n_1 = n(H) = \sqrt{n_0^2 + n_p^2 (1 - e^{-\alpha H})}$ 为 P 点的折射率.

将 $n^2(y) = n_0^2 + n_p^2 (1 - e^{-\alpha y})$ 代入 (1), 化简可得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{n_p e^{-\frac{\alpha}{2}y}}{n_1 \sin \theta_1} (\phi^2 - 1)^{1/2}, \quad (2)$$

其中

$$\phi = k e^{\frac{\alpha}{2}y}, \quad k = \left[\frac{n_0^2 + n_p^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}{n_p^2} \right]^{1/2}.$$

将 (2) 中得 y 全部换为 ϕ , 得

$$dx = -\frac{2n_1}{k\alpha n_p} \sin \theta_1 \frac{d\phi}{(\phi^2 - 1)^{1/2}},$$

积分

$$x = -\frac{2n_1}{k\alpha n_p} \sin \theta_1 \operatorname{arch} \phi + C$$

$$\phi = \operatorname{ch} \left[-\frac{k\alpha n_p}{2n_1 \sin \theta_1} (x - C) \right] = k e^{\frac{\alpha}{2}y},$$

解得光的轨迹方程

$$y = \frac{2}{\alpha} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \left[-\frac{k\alpha n_p}{2n_1 \sin \theta_1} (x - C) \right]}{k} \right), \quad (3)$$

其中

$$C = \frac{2n_1 \sin \theta_1}{k\alpha n_p} \operatorname{arch} (k e^{\frac{\alpha}{2}y}).$$

画图易知存在海市蜃楼现象.