SHU(MRU) 物理学院-每日一题 4

Prof. Shu

2023 年 7 月 7 日

题目 4.

白天沙漠上空的气温随高度 y 增加而递减, 下层空气温度较高, 密度和折射率较小上层空气则相反. 这种折射率的不均匀分布造成了所谓海市蜃楼的光学现象, 比较符合实际的折射率随高度变化的规律为

$$n^2(y) = n_0^2 + n_p^2(1 - e^{-\alpha y}),$$

式中 n_0 是 $y = 0$ 处的折射率, n_p 和 a 是两个常数, 由温度分布确定.

今在 $x = 0$, $y = H$(x 为水平轴) 处有一物点, 考虑该物点发出的某条与地面法线夹角为 θ_1 的光线. 试求该光线在空气中传播的轨迹方程, 并由此解释海市蜃楼现象.

题目 3 的参考答案.

已知

$$pV = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p^n, \tag{1}$$

$$pV = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n V^{-n}, \tag{2}$$

对 (1) 应用拉格朗日展开定理:

$$p=\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/V)^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\rho^k\right)^n\right], \tag{3}$$

其中 $\rho=\lambda_0/V$.

我们只需将上式合并同类项, 并与 (2) 对比, 就可以证明出结论.

在幂级数的收敛域中, 利用数学归纳法, 我们可以在 Cauchy 乘积的意义下证明:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\rho^k\right)^n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{(\alpha)}\prod_{i=1}^{n}\lambda_{\alpha_i}\right)\rho^k$$

其中 $\sum_{(\alpha)}$ 为对满足 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i=k$ 的正整数 α_i 的数值求和.

代入 (3), 可以得到

$$p=\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/V)^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_k\rho^k\right], \tag{4}$$

其中

$$a_k=\sum_{(\alpha)}\prod_{i=1}^{n}\lambda_{\alpha_i}.$$

化简并代入 ρ, 可得

$$p=\frac{\lambda_0}{V}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\tbinom{n+k}{n}a_{n+k}\lambda_0^kV^{-(n+k)}, \tag{5}$$

利用 a_{n+k} 的表达式展开 (5), 并与 (2) 对比, 即可得证.

这两个公式可用关于早期的温标定义和温度计制作, 体现了近似在热力学中的重要地位.