

SHU(MRU) 物理学院-每日一题 3

Pro. Shu

2023 年 7 月 5 日

题目 3.

设非理想气体的物态方程标为下列的两种形式:

$$pV = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p^n \quad \text{及} \quad pV = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n V^{-n},$$

求证

$$\mu_n = n! \sum_{(\alpha)} \prod_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda_l^{\alpha_l}}{\alpha_l!},$$

其中 $\sum_{(\alpha)}$ 为对满足下列两条件的非负整数 α_l 的数值求和:

$$\sum_{l=0}^{\infty} l\alpha_l = n, \quad \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l = n + 1.$$

题目 3 的提示.

利用拉格朗日展开定理. 可参考 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/396063872>.

物态方程可参考学习实际气体的维里系数.

题目 2 的参考答案.

1. 设 B 的质量为 m , A 的电荷量为 $+Q$, B 的电荷量为 $+q$.

能量守恒:

$$mgH + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 H} = mg\frac{H}{2} + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0(\frac{H}{2})},$$

得

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{2}mgH^2$$

当 B 不受力时, 有最大速度 v_{max} , 设此时 B 的高度为 h , 则

$$mg = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 h^2},$$

解得 $h = H/\sqrt{2}$.

再次利用能量守恒:

$$mgH + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 H} = mgh + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 h} + \frac{1}{2}mv_{max}^2,$$

解得

$$v_{max} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})gH}$$

2.

$$-mg + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 h^2} = ma$$

$$\ddot{h} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m h^2} + g = 0$$