SHU(MRU) 物理学院-每日一题 22

Prof. Shu

2023 年 7 月 27 日

题目 22.

解泊松方程的第一类边值问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = -f(x,y,z) \quad (r<R) \\ u|_{r=R} = g(x,y,z)\end{cases}$$

并试说明方程的电磁学意义.

题目 21 的参考答案.

这个问题对应的电磁学问题是求解自由电荷密度为 $\varepsilon_0 f(x,y,z)$ 的电荷在上半平面产生的电势, 其中电势在 $z=0$ 平面满足边界条件 $\phi = g(x,y)$.

对应的格林函数满足的边值问题为

$$\begin{cases}\nabla^2 G = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \\ G|_{z=0} = 0\end{cases}$$

见题目 20 的答案, 解为

$$\begin{aligned}G =& \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} \\ &- \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\end{aligned}$$

对于上半空间, 其边界 $\partial\Omega$ 是 $z_0=0$ 平面, 外法线 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向为 z_0 轴负方向, 故

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial G}{\partial n_0}\right|_{\partial\Omega}=-\left.\frac{\partial G}{\partial z_0}\right|_{z_0=0}\\
&=\frac{1}{4\pi}\left.\left(\frac{z-z_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}+\frac{z+z_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2\right]^{3/2}}\right)\right|_{z_0=0}\\
&=-\frac{1}{2\pi}\frac{z}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right]^{3/2}}
\end{aligned}
$$

将其代入公式

$$
u(\boldsymbol{r})=\iiint_{\Omega}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V_0-\iint_{\partial\Omega}g(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}\mathrm{d}S_0
$$

的二维形式, 得

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{r})=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\\
&+\frac{1}{4\pi}\int_{x_0=-\infty}^{\infty}\int_{y_0=-\infty}^{\infty}\int_{z_0=0}^{\infty}f(x_0,y_0,z_0)\\
&\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0
\end{aligned}
$$

这就是该问题的解. 当自由电荷密度为 0 时, 该方程约化为拉普拉斯方程, 解约化为

$$
u(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0
$$