SHU(MRU) 物理学院-每日一题 21

Prof. Shu

2023 年 7 月 26 日

题目 21.

解泊松方程的第一类边值问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = -f(x,y,z) \quad (-\infty < x, y < \infty,\ z > 0) \\ u(x,y,z)|_{z=0} = g(x,y) \quad (-\infty < x, y < \infty)\end{cases}$$

并试说明方程的电磁学意义.

题目 21 的提示.

可以将 u 看成电势. 该偏微分方程可以使用格林函数法求解. 相关资料不难查阅.

泊松方程的基本积分公式

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint_\Omega G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r}_0) \mathrm{d}V_0 + \iint_{\partial\Omega} \left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0} - u(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}\right] \mathrm{d}S_0$$

对于第一类边值问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r}) \\ u(\boldsymbol{r})|_{\partial\Omega} = g(\boldsymbol{r})\end{cases}$$

解的公式为

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint_\Omega G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r}_0) \mathrm{d}V_0 - \iint_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0} \mathrm{d}S_0$$

其中格林函数 G 的构建可使用题目 20 中的电像法.

(其实电磁学的题比较难出，稍微不注意就变成数学题了, 所以我干脆出了一道数学题, 宣传一下格林函数大法. 学过微积分的可以尝试一下.)

题目 20 的参考答案.

在以下的解答中取 $\varepsilon_0 = 1$.

1.

设电势为 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$, 其中 $\boldsymbol{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, 则方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 G = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \\ G|_{z=0} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

使导体平面电势为零的一种等效方法是, 在下半空间的 M_0 的对称点 $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ 放置一个 $q = -1$ 的像点荷.

于是方程的一个解为

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \tag{2}$$

由电场唯一性和边界条件可知这就是方程的解.

2.

设电势为 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$, 其中 $\boldsymbol{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, 则方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 G = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \\ G|_{r=R} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

使球壳电势为零的一种等效方法是, 在空间某点 $M_1(r_1, \theta_1)$ 还有一个像点荷. M_1 的位置和电荷由 $r_1 = R^2/r_0$, $q = -R/r_0$ 确定.

于是方程的一个解为

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}} - \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\sqrt{r^2 r_0^2 + R^4 - 2R^2 rr_0 \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}} \tag{4}$$

由电场唯一性和边界条件可知这就是方程的解.