

SHU(MRU) 物理学院-每日一题 2

Pro. Shu

2023 年 7 月 4 日

题目 2.

地面上有一固定的点电荷 A , 在 A 的正上方有一带电小球 B , B 在重力和 A 的库伦斥力的作用下, 在 A 上方 $\frac{H}{2}$ 和 H 之间作往返的自由振动.

1. 试求 B 运动的最大速率 v_{max} .
2. 设 B 的质量为 m , A, B 的电荷量都为 $+q$. 写出 B 的牛顿运动方程.

题目 1 的参考答案.

1. $\beta = \alpha^{\frac{1-k}{2}}, \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \left(\frac{l'}{l}\right)^3$

2. $\beta = \alpha^{1-k/2}, \left(\frac{t'}{t}\right) = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}, \left(\frac{v'}{v}\right) = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}, \left(\frac{E'}{E}\right) = \left(\frac{l'}{l}\right)^k, \left(\frac{p'}{p}\right) = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}, \left(\frac{M'}{M}\right) = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+k/2}$

3. 代入 $k = -1$, 得 $\beta = \alpha^{3/2}$. 于是有 $\left(\frac{t'}{t}\right) = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2}, \left(\frac{v'}{v}\right) = \left(\frac{l'}{l}\right)^{-1/2}, \left(\frac{E'}{E}\right) = \left(\frac{l'}{l}\right)^{-1}, \left(\frac{p'}{p}\right) = \left(\frac{l'}{l}\right)^{-1/2}, \left(\frac{M'}{M}\right) = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/2}$.

由位力定理可知, 如果力学系统在有限空间内运动, 势能是坐标的 k 次齐次函数, 则动能和势能的时间平均值之间存在关系: $\bar{U} = \frac{2}{k+2}E, \bar{T} = \frac{k}{k+2}E$.

在开普勒问题中, $k = -1$, 则 $2\bar{T} = -\bar{U}$, 此时 $E = -\bar{T} < 0$.

还可以考虑有效势能 $U_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$, 由其图像易知该结论.