SHU(MRU) 物理学院-每日一题 15

Prof. Shu

2023 年 7 月 20 日

题目 15.

一静电荷分布产生如下径向电场

$$\boldsymbol{E} = A\frac{e^{-br}}{r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

式中, A 和 b 是常数. 计算电荷密度并求出总电荷.

题目 15 的提示. 三维狄拉克 δ 函数满足:

$$\nabla \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

式中的 ∇ 是一个矢量算符, 称为 Hamilton 算子. 这个公式可以分区域讨论证明, 其物理图像对应于点电荷.

题目 14 的参考答案.

(1). 取无穷远点为势能零点

$$V(r) = \int_r^\infty \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \int_r^\infty \frac{1}{2}mv_1^2\delta(r'-a)\mathrm{d}r' = \begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2,\ r < a \\ 0,\ r > a \end{cases} \tag{1}$$

(2). 若粒子进入了球. 设粒子在球内的速率为 v', 由能量守恒可得

$$\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v'^2 = v_0^2 - v_1^2$$

而 $v_0 < v_1$, 不成立. 于是粒子不能进入半径 $r=a$ 的球内.

对于粒子在 $r=a$ 处, 列出牛顿第二定律的径向分量方程并整理

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)=\frac{1}{2}mv_1^2\delta(r-a)$$
$$m\left(\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}\right)=\frac{1}{2}mv_1^2\delta(r-a)$$
$$\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\left(\dot{r}^2\right)-h^2\int\frac{\mathrm{d}r}{r^3}=\frac{1}{2}v_1^2\int\delta(r-a)\mathrm{d}r$$

其中第二步利用了角动量守恒, 第三步的积分是关于碰撞过程的积分.

因为 $r>a$, 所以 $\int\delta(r-a)\mathrm{d}r=0$; 因为碰撞过程无限短, 所以 $\int\frac{\mathrm{d}r}{r^3}=0$. 可以直接看出碰撞前后粒子的径向速率相等, 速度反向. 而粒子切向速度不变, 这就表示反射角等于入射角.

注：如果你思考了一下, 你会马上发现这种运动的轨迹和光路很相似. 事实上, 可以利用力学中的势能分布和牛顿运动方程模拟几何光学系统, 通过解力学方程得到光路图. 读者可以查阅相关资料并尝试证明. 另一方面, 我感觉这种相似性在一定程度上还暗示了经典力学内在的几何性（几何力学？）. 未来, 我们或许还可以将这种理解利用在量子力学和波动光学上.

另外, 你会发现本解答在数学上有不严谨的地方, 但这并不妨碍其正确性.