SHU(MRU) 物理学院-每日一题 14

Prof. Shu

2023 年 7 月 18 日

题目 14.

一质量为 m 的粒子以速度 v_0 射向一固定散射中心. 该散射中心施以排斥力 $\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}mv_1^2\delta(r-a)\boldsymbol{e_r}$, 其中 $\boldsymbol{e_r}$ 是由力心出发沿其径向的单位矢量, a 是一固定半径, v_1 是具有速度量纲的常数.

(1) 求势能.

(2) 证明: 若 $v_0<v_1$, 则粒子不能进入半径 $r=a$ 的球内，而被反射回去，反射角等于入射角.

题目 14 的提示. 题目中的 $\delta(r-a)$ 是狄拉克 δ 函数 (但并不是传统定义上的函数), 网上有相关资料. 如果想要了解数学方面的严格定义, 可以阅读广义函数相关内容.

题目 13 的参考答案.

设入射光子的动量为 $\boldsymbol{p}$, 散射光子的动量为 $\boldsymbol{p'}$, 反冲电子的动量为 $\boldsymbol{p_e}$, 反冲电子的能量为 E_k. 由能量守恒和动量守恒可知

$$pc=p'c+E_k \tag{1}$$

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p'}+\boldsymbol{p_e} \quad 即 \quad p'^2=p^2+p_e^2-2p_ep\cos\varphi \tag{2}$$

相对论能量和动量关系为

$$\left(m_0c^2+E_k\right)^2=E_e^2=(p_ec)^2+(m_0c^2)^2$$

即

$$p_e^2 = \frac{1}{c^2}\left(E_k^2 + 2E_k m_0 c^2\right) \tag{3}$$

由 (1) 可得

$$p'^2 = p^2 + \frac{E_k^2}{c^2} - 2\frac{pE_k}{c}$$

将上式代入 (2) 可得

$$\frac{E_k^2}{c^2} - 2\frac{pE_k}{c} = p_e^2 - 2p_e p\cos\varphi$$

将 (3) 代入上式, 并化简可得

$$E_k\left(m_0 + \frac{p}{c}\right) = p_e p\cos\varphi$$

再次将 (3) 和 $p = h\nu/c$ 代入, 化简后得

$$E_k = \frac{2\frac{(h\nu)^2}{m_0c^2}\cos^2\varphi}{\left(1+\frac{h\nu}{m_0c^2}\right)^2 - \left(\frac{h\nu}{m_0c^2}\right)^2\cos^2\varphi} \tag{4}$$

当 $\varphi = 0$ 时,E_k 最大

$$(E_k) = \frac{2(h\nu)^2}{m_0c^2 + 2h\nu}$$