SHU(MRU) 物理学院-每日一题 10

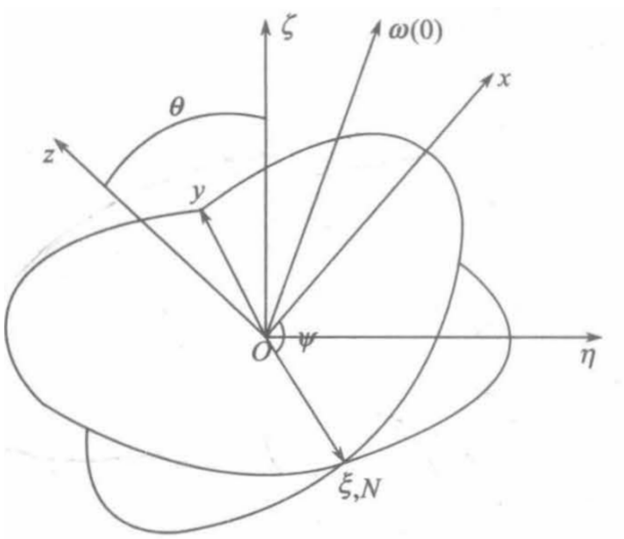
Prof. Shu

2023 年 7 月 14 日

题目 10.

半径为 R, 质量为 m 的匀质细圆环均匀带电, 总电量为 $Q(Q>0)$, 放在光滑的水平面上. 环内、外有垂直环面向上的均匀磁场 B. 若将圆环以角速度 ω 绕着通过圆心的竖直轴匀速旋转. 试求环内因为这种转动而形成的附加张力.

题目 9 的参考答案.



通过刚体质心, 取两组坐标系: 一个固定的坐标系 $O\xi\eta\zeta$, ζ 轴与初始角

动量方向一致; 一个固连于刚体的坐标系 $Oxyz$, z 轴沿刚体的对称轴, 选取 x、y 轴时, 使初角速度矢量在 y 轴方向的分量为零, 即 $\omega_y(0)=0$, 并使 $\omega_x(0)>0$, 选取 ξ、η 轴时, 使 $\omega_\xi(0)=0$、$\omega_\eta(0)>0$. 这样选取两坐标系后, $t=0$ 时, z、ζ、x、η 四个轴和 $\boldsymbol{\omega}(0)$ 共面, 两组坐标系在 $t=0$ 时的位置如图.$(I_1=I_2<I_3)$

列出部分欧拉动力学和运动学方程

$$I_3\dot{\omega}_z=0 \tag{1}$$

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi \tag{2}$$

$$\omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi} \tag{3}$$

其中 θ, φ, ψ 分别为章动角, 进动角, 自转角.

$$\boldsymbol{\omega}(0)=\omega_{x0}\boldsymbol{i}+\omega_{z0}\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

角动量守恒:

$$J=J(0)=\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2+I_3^2\omega_{z0}^2} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{J}=J\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{i}+J\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{j}+J\cos\theta\boldsymbol{k} \tag{6}$$

由 (1) 可得

$$\omega_z=\omega_{z0} \tag{7}$$

由 (5),(6) 和 (7) 可得

$$\omega_x=\sqrt{\frac{I_1^2\omega_{x0}^2+I_3^2\omega_{z0}^2}{I_1}}\sin\theta\sin\psi \tag{8}$$

$$I_3\omega_{z0}=J\cos\theta \tag{9}$$

由 (9) 可得

$$\cos\theta=\frac{I_3\omega_{z0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2+I_3^2\omega_{z0}^2}} \tag{10}$$

由 (2) 和 (8) 可得

$$\dot{\theta} = 0 \tag{11}$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}{I_1}} \tag{12}$$

由 (3),(4),(10),(12) 可得

$$\dot{\psi} = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{z0} \tag{13}$$

直接写出关于 ω_ξ, ω_η, ω_ζ 的欧拉运动学方程

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \omega_\eta &= \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{aligned} \tag{14}$$

将 (10),(11),(12),(13) 代入 (14)

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{z0}\frac{I_1\omega_{x0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}\sin\varphi \\ \omega_\eta &= -\left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{z0}\frac{I_1\omega_{x0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}}\cos\varphi \\ \omega_\zeta &= \sqrt{\frac{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}{I_1}} + \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{z0}\frac{I_3\omega_{z0}}{\sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}} \end{aligned} \tag{15}$$

此外,

$$u_{\eta 0} = -\sin\theta,\ u_{\zeta 0} = \cos\theta, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = u_{\eta 0}\boldsymbol{\eta}^0 + u_{\zeta 0}\boldsymbol{\zeta}^0.$$

于是, 我们可以得出答案

$$\boldsymbol{J}(t) = \sqrt{I_1^2\omega_{x0}^2 + I_3^2\omega_{z0}^2}\,\boldsymbol{\zeta}^0 \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_\xi\boldsymbol{\xi}^0 + \omega_\eta\boldsymbol{\eta}^0 + \omega_\zeta\boldsymbol{\zeta}^0 \tag{18}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = -u_{\eta 0}\sin\varphi\boldsymbol{\xi}^0 + u_{\eta 0}\cos\varphi\boldsymbol{\eta}^0 + u_{\zeta 0}\boldsymbol{\zeta}^0 \tag{19}$$