虚拟数学

山河大学 换变射仿

目录

0 虚拟数学的起源

1 虚化

定义 1 (映射的虚化)**.** 给定集合 X，子集 $\widetilde{X}$ 与满射 $f: X \to Y$. 记 f 在 $\widetilde{X}$ 上的限制为 $\widetilde{f}$, 若 $\widetilde{f}$ 仍是一个满射，则称 f 是 $\widetilde{f}$ 的一个**虚化映射**。给定 $\widetilde{X}$ 与 $\widetilde{f}$, 反过来寻找 f 与 X 的过程被称作**虚化**。

定义 2 (拟虚化)**.** 在上一个定义的前提下，如果 $\widetilde{f}$ 不一定是满射，记其像为 $\widetilde{Y}$，称 (X, Y, f) 是 $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{f})$ 的一个**拟虚化**. 记作 $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{f}) \leftarrow (X, Y, f)$. 由于 Y 被 X 和 f 唯一确定，也可以省略 Y 记作 $(\widetilde{X}, \widetilde{f}) \leftarrow (X, f)$.

定义 3 (拟虚塔). **拟虚塔**是一列（有限或无限）拟虚化构成的映射:

$$(X_0, Y_0, f_0) \leftarrow (X_1, Y_1, f_1) \leftarrow (X_2, Y_2, f_2\,) \leftarrow (X_3, Y_3, f_3\,)...$$

其中 $(X_n, Y_n, f_n\,) \leftarrow (X_{n+1}, Y_{n+1}, f_{n+1}\,) \leftarrow$ 被称作拟虚塔的第 n 层。若 $Y_n = Y_{n+1}$，则称第 n 层是**石楼**，否则称其为**木楼**。

例子 1. 考虑 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上的加法映射 $+$, $(\{(1,1),(0,2),(1,2)\},+)$ 是 $(\{(1,1),(1,2)\},+)$ 的一个虚化。而 $(\{(1,1),(0,2),(1,2)\},+)$ 只是 $(\{(1,1),(0,2)\},+)$ 的一个拟虚化。

附注 1. 我们遵循欧洲传统，一幢楼从 0 层开始数。

附注 2. 石楼的概念于之虚拟数学如同不动点于之动力系统。

定义 4 (顶楼). 对一座有 n 楼的拟虚塔，称 $(X_{n+1}, Y_{n+1}, f_{n+1})$ 是其**顶楼**。对无限长的虚拟塔，称 $(\lim_{n\to+\infty} X_n, \lim_{n\to+\infty} f_n, \lim_{n\to+\infty} f_n)$ 为其顶楼。

引理 1. 顶楼是所有楼层的虚化。

在具体的问题中，讨论虚化时往往会给 X 和 f 赋予额外的结构。一方面，需要具体问题具体对待，另一方面也有处理问题的一般方法，我们将逐一介绍。

在本讲义中，接下来两节讲讨论对象虚化时所受到的限制。

2 虚拟加然

在这一节中，我们考虑加法在自然数上的虚化，简称**加然虚化**。由于是自然数加自然数，也称作**然然虚化**。

问题 1. 设 A 是 n 元整数集，且 $(A\times A,+) \leftarrow (B\times B,+)$ 是一个虚化，那么整数集 B 最多能有多少个元素？

练习 1. 证明 $m = 1,2,3,4$ 是答案分别为 $1,2,3,5$.

在具体讨论前进行一些简单的估计，记 B 的元素个数为 m.

首先 A 中 n 个元素最多给出 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个和数。而将 B 中 m 个数从小到大排成一列 $a_1,...,a_m$，考虑 $2a_1,a_1+a_2,2a_2,a_2+a_3,...,2a_m$ 是 $B+B$ 中 $2m$ 两个不同的元素。因而 $2m<\frac{n(n+1)}{2}$ 故在 $n\to+\infty$ 时 m 至多有 $n^2/4$ 的增速。

不妨设 $n=3k-2$, 考虑 $A=\{1,2,...,k,2k,3k,...,k^2-k,k^2-k+1,...,k^2\}$, $B=\{1,2,...k^2\}$. 那么 $B+B=\{2,3,...,2k^2\}=A+A$. 因而存在 B，使得 $m\geq 2k^2\geq\frac{n^2}{9}$. 因而我们得知 B 最多可能含有的元素至少有 $n^2/9$ 的增速。

因而我们得知本题中 $|B|$ 的增速是 $C(n^2)$, 且 $1/9\leq C\leq 1/4$，因而进一步提问：

问题 2. 给出 C 更精确的范围。

3 虚拟复虚拟

接下来讨论一个稍微复杂一些的例子：复变函数的虚化。

在本章中，我们总要求集合 U 是复平面 $\mathbb{C}$ 的一个开子集（或黎曼面），且所有虚化函数 f 都是全纯的。

问题 3. 对开集 U 上全纯函数 f, 其存在非平凡的全纯虚化的充要条件是什么？

为简化起见，先不妨设开集 U 是单位圆盘 $\mathbb{D}$. 进一步，我们假设 f 可以延拓到 $\mathbb{D}$ 的一个至多有限个点例外的邻域上。也就是说 ∂D 上每一点都是“可去奇点”，”极点”,“本性奇点”三者之一。

根据开映射定理与反函数定理不难得到如下结论：

练习 2. 若 f' 在 $\mathbb{D}$ 中无零点，则 f 不可虚化。

并且显然有如下事实，我们也留作习题：

断言 1.（1）如果边界上 $f|_{\partial\mathbb{D}}$ 有自交，那么 f 可以虚化。将 f 在内部的边界处往外推一点即可。

（2）如果 f 将 $\mathbb{D}$ 映到有界区域 V，将 $\partial\mathbb{D}$ 映到 ∂V，那么 f 不能虚化。

由上述断言可以看出，f 是否可以虚化高度依赖于 $f|_{\partial D}$ 在边界上的性状，即：

引理 2. 若 f 在 ∂D 上没有极点和本性奇点，则 f 不可虚化当且仅当 f 将 $\mathbb{D}$ 映到区域 V，且把 $\partial\mathbb{D}$ 映到 ∂V. 这是一个 S^1 到 S^1 的映射，记其度数为 k.

根据 Riemann 映射定理，可以不妨设象集 V 就是单位圆盘 D, 那么完全解决没有极点和本性奇点的问题就变成了：

练习 3. *分类 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, 使得 $f|_{\partial D} = \partial D$, 且 $\deg(f|_{\partial D}) = k$.*

由于懒得打过程，这个问题仍然是习题，我们给出结论：

定理 1. *上述映射只能是 $f = M_1 \cdot M_2 \cdot ... \cdot M_k$. 其中 M_i 是 Mobius 变换。*

而若 f 有本性奇点，由 Picard 定理知 f 几乎是满射，只要可以延拓就一定能虚化。

对 f 只有极点的情况，若 f 是满射，则一定能虚化。若不是，则可以通过反演化为无零点情况。综上所述，我们得到了如下的完全分类：

定理 2 (复虚化定理)**.** *若 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 可以延拓到 $U - \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ 上，其中 U 是 $\mathbb{D}$ 的一个邻域，p_i 是 U 中的点。那 f 没有全纯虚化当且仅当以下两种情况之一成立：*

(2) 存在双全纯映射 H 以及 Mobius 变换 $M_1, ..., M_k$ 使得 $f = H \circ (M_1 \cdot M_2 \cdot ... \cdot M_k)$.

(3) 存在双全纯映射 H 以及 Mobius 变换 $M_1, ..., M_k$ 和复数 z_0 使得 $f = \frac{1}{H \circ (M_1 \cdot M_2 \cdot ... \cdot M_k - z_0)}$.

4 开始套娃